

Zur Berechnung der Wertziffern bei Teamturnieren

Wolfhart Umlauf und Michael Stieglitz

30. März 2009

1 Das Problem

Die in der Rangliste für Teamturniere angegebenen Zahlen sind sog. *Wertziffern*. Sie spiegeln die individuelle Spielstärke wider. Jeder Spieler kann in der Rangliste seine momentane Wertziffer unter seinem Namen finden. Unser Problem hier ist die Frage, wie nach einem Teamturnier aus der bisherigen Wertziffer die neue, aktualisierte Wertziffer entsteht. Das Verfahren ist ähnlich dem Prinzip der Berechnung der Elozahlen im Schach.

Wer im Folgenden an einer vereinfachten Erklärung interessiert ist, sollte nur den 2. Abschnitt lesen, den Frau Roethe verfasst hat. Wer sich aufgrund von mathematischen Vorkenntnissen mehr zutraut, kann den 3. Abschnitt lesen.

2 Vereinfachte Erklärung des Verfahrens

Wir nehmen als Beispiel an, die mittlere Teamstärke von Team 1 sei 5174 (= Summe aller 4 Wertziffern der Spieler von Team 1 vor dem Kampf, geteilt durch 4). Die mittlere Teamstärke von Team 2 sei 4690. Aus diesen beiden Zahlen wird eine erwartete IMP-Zahl von 31 IMPs berechnet (Näheres in Abschnitt 3). Man nimmt also an, dass Team 1 mit der größeren Teamstärke gegen Team 2 mit der geringeren Teamstärke im folgenden Teamkampf 31 IMPs gewinnen wird. Nach dem Spiel stellt sich im Beispiel aber heraus, dass Team 1 sogar 42 IMPs gewonnen hat. Für die Berechnung der neuen Wertziffern für alle Spieler ist nun wichtig, wie wahrscheinlich dieses Ergebnis von 42 IMPs ist. Hätte Team 1 nur die erwarteten obigen 31 IMPs erreicht, wäre die Wahrscheinlichkeit dafür nur 50% gewesen. Da Team 1 aber besser als erwartet gespielt hat, bekommen alle seine Spieler einen Zuwachs der persönlichen Wertziffern, der im wesentlichen von der Differenz dieser Wahrscheinlichkeit zu den 50% und von der Anzahl der gespielten Boards abhängt.

Hier im Beispiel berechnet sich gegenüber den alten Wertziffern ein Zuwachs für alle Spieler von Team 1 bzw. ein Abzug für alle Spieler von Team 2 von 18.

3 Mathematische Erklärung des Verfahrens

Bei der Berechnung der neuen Wertziffer für jeden Spieler ist Grundlage die *mittlere Teamstärke* desjenigen Teams, in dem der Spieler mitspielt. Diese mittlere Teamstärke ihrerseits wird aus den vier aktuellen Wertziffern der vier Spieler des Teams durch arithmetische Mittelbildung berechnet. So wird zunächst für jedes Team die mittlere Teamstärke berechnet.

Betrachten wir dazu zwei Teams, die gegeneinander spielen, und nehmen an, dass die aktuellen Wertziffern von Team 1 zu Beginn des Turniers die Werte $w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}$ sind, im Beispiel 4879, 5482, 5235, 5100. Dann ist die mittlere Teamstärke von Team 1

$$w_1 := (w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14})/4,$$

also im Beispiel $w_1 = 5174$. Analog haben wir für das Team 2 die Werte $w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}$. Im Beispiel wählen wir 5166, 4699, 4530, 4365. Also erhalten wir mit

$$w_2 := (w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24})/4$$

die mittlere Teamstärke $w_2 = 4690$ von Team 2. Dass hier $w_1 \geq w_2$ ist, ist ohne Belang, da wir im anderen Fall einfach die Nummerierung der beiden Teams vertauschen würden. Wir nehmen ferner an, dass in dem Teamkampf n Boards gespielt werden. Im Beispiel $n = 24$. Da sich n mit der Art des Teamturniers ändert, indizieren wir die folgenden Größen mit n . Als Erstes definieren wir

$$e_n := \frac{w_1 - w_2}{300} \cdot n \tag{3.1}$$

als ein Maß für den momentanen, also *erwarteten* Stärkeunterschied von Team 1 zu Team 2. Die Zahl 300 ist dabei willkürlich und wirkt sich nur auf die Skalierung der Wertziffern aus. Bei Differenzen $w_1 - w_2 > 300$ wird (3.1) durch

$$e_n := \sqrt{\frac{w_1 - w_2}{300}} \cdot n \tag{3.2}$$

ersetzt, um e_n etwas zu „dämpfen“. In unserem Beispiel ist nach (3.2) und nach Runden nicht ganzzahliger Werte $e_{24} = 31$. Es wird also erwartet, dass Team 1 gegenüber Team 2 mit einer IMP-Differenz von 31 IMPs gewinnt.

Wir wenden uns nun dem Ergebnis nach dem Kampf zu. Das Ergebnis, das man am Ende des Kampfs kennt, ist die tatsächliche Differenz d_n der IMPs zwischen

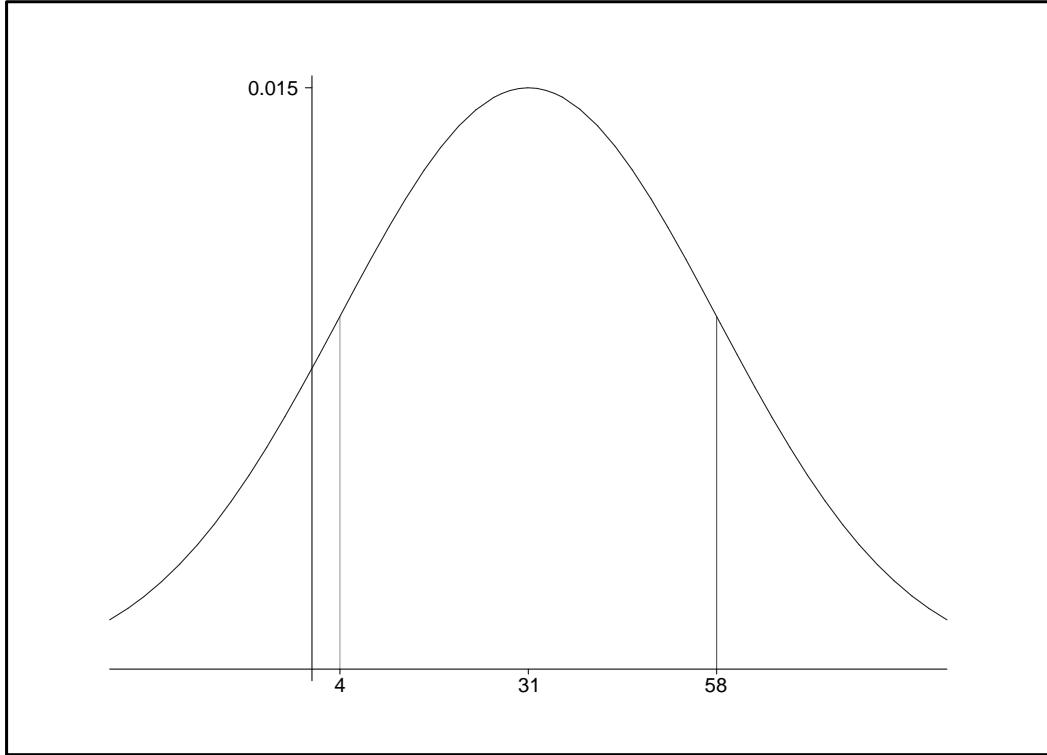
Team 1 und Team 2. Wir nehmen im Beispiel an, dass der Kampf 80:38 zugunsten von Team 1 ausgegangen ist, also $d_{24} = 42$ IMPs ist. Dieses Ergebnis hängt aber nicht nur vom erwarteten Stärkeunterschied e_n ab, sondern auch vom Zufall. Zufällig etwa ist die Tagesform oder ein großes Missverständnis und vielerlei mehr. Zur Beschreibung von Vorgängen, die vom Zufall abhängen, benutzt man in der Stochastik sog. *Zufallsvariablen*. Sie werden mit großen Buchstaben bezeichnet, also hier D_n , um sie deutlich von dem Wert d_n zu unterscheiden, den sie in einem konkreten Fall annehmen. Und wenn man von solchen Zufallsvariablen die sogenannte *Dichte* kennt, ist man in der Lage, durch D_n Wahrscheinlichkeiten, die einen interessieren, zu berechnen. Und darum geht es uns jetzt. Aus statistischen Untersuchungen von vielen Bridgeturnieren in den letzten Jahren weiß man, dass D_n die Dichte einer sog. *Normalverteilung* ist. Kenner unter den Lesern können sie aus (3.3) unten ablesen. Wir dagegen wollen versuchen, sie uns zu veranschaulichen: man denkt sich die gesamte Wahrscheinlichkeit von 100% als eine physikalische Masse der Größe 1. Diese Masse wird auf der reellen Achse gemäß der vorgegebenen Dichte verteilt, die zu jedem Punkt der reellen Achse einen numerischen Wert angibt, der besagt, wie dicht man sich die Massenverteilung in diesem Punkt vorzustellen hat. In unserem Fall wird die Dichte zum einen durch den Parameter e_n aus (3.1) bzw. (3.2) bestimmt. Der Parameter e_n heißt der *Erwartungswert* der Normalverteilung. Man kann ihn als Massenschwerpunkt der Dichte deuten. Zum andern hängt die Normalverteilung aber auch noch von einem zweiten Parameter s_n ab, der sog. *Standardabweichung*. Aufgrund der erwähnten Untersuchungen weiß man, dass

$$s_n = 5.5 \cdot \sqrt{n}$$

ist. Dabei ist der Faktor 5.5 ein Wert, der allein aus der Erfahrung gewonnen wurde. Bei uns im Beispiel ist $s_{24} = 27$. Anschaulich ist die Standardabweichung ein Maß dafür, wie stark die Werte der Zufallsvariablen D_n um den Erwartungswert e_n schwanken. Grafisch sieht die Dichte in unserem Beispiel so wie im Bild weiter unten aus.

Es handelt sich um die bekannte Gaußsche Glockenkurve. In dem Bereich der Kurve, der symmetrisch um den Erwartungswert $e_{24} = 31$ liegt und auf jeder Seite eine Breite von $s_{24} = 27$ hat, liegen etwa 70% der Wahrscheinlichkeitsmasse. Im Beispiel ist demnach zu erwarten, dass Team 1 mit 70% Wahrscheinlichkeit eine IMP-Differenz zwischen 4 und 58 erspielt.

Was uns an der Zufallsvariable D_n interessiert, ist die Wahrscheinlichkeit $W(d_n)$, dass Team 1 gegen Team 2 höchstens die beobachtete IMP-Differenz d_n erspielt,



nämlich

$$W(d_n) = \Phi_{e_n, s_n^2}(d_n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{d_n - e_n}{5.5 \cdot \sqrt{n}}} e^{-t^2/2} dt. \quad (3.3)$$

Dieser Wert kann nicht so ohne weiteres berechnet werden, steht aber zum Glück heute auf fast jedem Taschenrechner zur Verfügung. In unserem Beispiel ist $W(42) = 0.665$. Wäre $W(d_n) = 0.5$, so wäre $d_n = e_n$ sein, d.h. Team 1 hätte mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% die IMP-Differenz erspielt, die man von ihm erwartet, nämlich e_n . In diesem Fall sollen sich natürlich die bisherigen Wertziffern für keinen der am Team 1 beteiligten Spieler ändern. Ist dagegen $W(d_n) > 0.5$ (analog der Fall $W(d_n) < 0.5$), so hat Team 1 besser (im analogen Fall schlechter) als erwartet gespielt und alle Spieler von Team 1 erhalten einen Zuwachs zu (im analogen Fall einen Abzug von) ihren bisherigen Wertziffern. Als diesen Zuwachs definiert man

$$z_n := (W(d_n) - 0.5) \cdot n \cdot F_n. \quad (3.4)$$

(Dieses z_n wird von den Wertziffern der Spieler von Team 2 natürlich abgezogen.) In (3.4) ist F_n ein sogenannter *Entwicklungsfaktor*, der die „Dynamik“ der Rangliste steuert. Für die Teamliga, Liga und Pokalkämpfe mit $n = 24$ oder $n = 32$ Boards ist $F_n = 4, 5$. Mit diesem Wert ergibt sich aus (3.4) in unserem Beispiel der gerundete Wert $z_{24} = 18$. Demnach sind 4897, 5500, 5253, 5118 die neuen Wertziffern für die

Spieler von Team 1 und 5148, 4681, 4512, 4347 die neuen Wertziffern für die Spieler von Team 2. Der maximale Zuwachs bzw. Abzug bei 24 Boards ist 54. Die Wahrscheinlichkeit, dass Team 1 verloren hätte ist $W(0) = 13\%$. Für Mittwochsturniere mit $n = 7$ Boards ist $F_7 = 9$. Der maximale Zuwachs bzw. Abzug also 32.